

Les niveaux quantiques de la gravité

PELISSIER Matthieu & LAFORTUNE Tristan

2022

Les éléments **rouges** dans le texte suivant sont ceux devant rester présents au tableau tout au long de la présentation.

1 Introduction

Dans de nombreux champs de la physique, lorsqu'on étudie le mouvement d'une particule à l'échelle microscopique, l'interaction gravitationnelle est amenée à être négligée devant d'autres interactions tel que l'interaction électromagnétique, ou à plus courte portée les interactions forte et faible. En effet, si l'on s'intéresse aux interactions entre le proton et l'électron formant un atome d'hydrogène, on peut montrer que l'interaction gravitationnelle est 10^{40} fois moindre que l'interaction électromagnétique. Cependant, à cette échelle, la gravité peut adopter un comportement quantique que nous allons mettre en évidence. Durant cette présentation, nous aborderons le problème d'un point de vue théorique avant de considérer une approche expérimentale.

2 Résolution théorique d'une particule dans un champ gravitationnel

Dans un premier temps intéressons nous à une description formelle, théorique, des états quantiques associés à la gravité terrestre.

Considérons une particule de masse m dans le potentiel gravitationnel terrestre (accélération de pesanteur $g = 9.81m.s^{-2}$) tel que :

$$V(z) = mgz \text{ pour } z > 0 \qquad V(z) = \infty \text{ pour } z < 0 \qquad (\rightarrow \text{tracer potentiel})$$

D'où l'Hamiltonien :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{V}(z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z)$$

Les $|\Psi_n\rangle$ sont les états propre associés à l'opérateur Hamiltonien \hat{H} en représentation $|z\rangle$: $\Psi_n(z, t) = \langle z|\Psi_n(t)\rangle$. Puisque \hat{H} est indépendant de t :

$$|\Psi_n(t)\rangle = \hat{U}(t, 0) |\Psi_n(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\Psi_n(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |\Psi_n(0)\rangle$$

D'où :

$$\Psi_n(z, t) = \langle z|\Psi_n(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \langle z|\Psi_n(0)\rangle = \Psi_n(z)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \quad (1)$$

Etant donnée la forme des $\Psi_n(z, t)$, on peut considérer l'équation de Shrodinger indépendante du temps :

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi_n(z) &= E\Psi_n(z) \\ \implies -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial z^2} + mgz\Psi_n &= E\Psi_n \qquad \text{pour } z > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

En posant $\epsilon = \frac{E}{E_0}$ et $Z = \frac{z}{z_0}$ (avec $z_0 = (\frac{\hbar}{2m^2g})^{\frac{1}{3}} = 5,87\mu m$ et $E_0 = mgz_0 = 1,4peV = 1,4.10^{-31}J$ construits par analyse dimensionnelle, valeurs numériques pour un neutron) on se ramène à une equation adimensionnée :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} + mgz \Psi_n = E \Psi_n &\iff -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial Z^2 z_0^2} + mgZ z_0 \Psi_n = \epsilon E_0 \Psi_n \\ &\iff \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial Z^2} - \frac{2m^2 g z_0^3}{\hbar^2} \Psi_n = -\frac{2m z_0^2 \epsilon E_0}{\hbar^2} \Psi_n \end{aligned}$$

On remplace E_0 :

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial Z^2} + \frac{2m^2 g z_0^3}{\hbar^2} (\epsilon - Z) \Psi_n = 0$$

On remplace z_0 :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial Z^2} + (\epsilon - Z) \Psi_n = 0} \quad (3)$$

Il s'agit d'une équation de Airy, dont la solution correspond à :

$$\Psi_n(Z) = C Ai(Z - \epsilon) + D Bi(Z - \epsilon) \quad (4)$$

Avec Ai et Bi les fonctions de Airy (Attention ! : ce ne sont pas les fonctions de Airy de l'optique ondulatoire), représentées ci dessous (figure de gauche) :

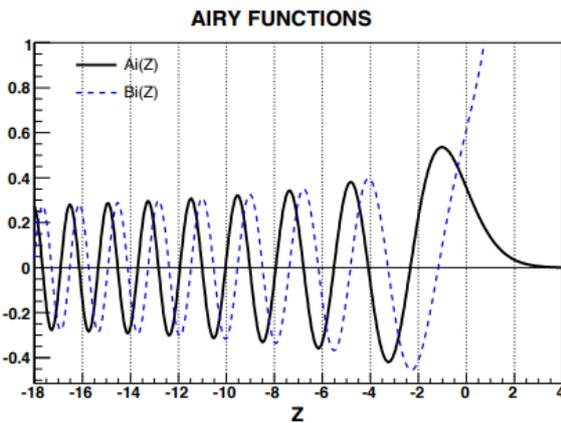


Fig.1 : Graphe des fonctions de Airy Ai et Bi en fonction de Z

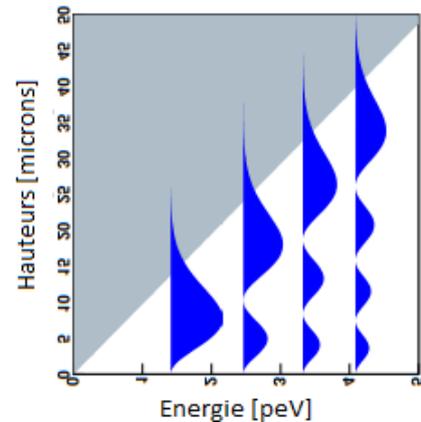


Fig. 2 : Représentation des densités de probabilité de chaque état en fonction de la hauteurs et de leur énergie

CL : pour $Z \rightarrow \infty$, $\Psi_n(Z) \rightarrow 0$, Or $Bi(Z - \epsilon)$ diverge. On pose donc $D = 0$, d'où :

$$\Psi_n(Z) = C Ai(Z - \epsilon) \quad (5)$$

Normalization : La constante C sera quant à elle fixée en posant :

$$\int_0^\infty |\Psi_n(Z)|^2 dz = 1 \iff z_0 |C|^2 \int_0^\infty |Ai(Z - \epsilon)|^2 dZ = 1$$

Enfin, on peut montrer à partir de l'équation précédente :

$$C = \frac{1}{\sqrt{z_0} |Ai'(-\epsilon)|} \implies \boxed{\Psi_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{z_0} |Ai'(-\epsilon)|} Ai(Z - \epsilon)} \quad (6)$$

CR : $V(z) = \infty \forall z \leq 0 \implies \Psi_n(Z = 0) = 0 \implies Ai(-\epsilon) = 0$

Ai passant plusieurs fois en 0, il y a alors quantification de l'énergie ($\epsilon \rightarrow \epsilon_n$) et donc :

$$E_n = E_0 \epsilon_n$$

n	1	2	3	4	5
E_n (peV)	1.407	2.459	3.321	4.083	4.779
$h_n = \frac{E_n}{mg}$ (μm)	13.7	24.0	32.4	39.8	46.6

Les hauteurs et énergies sont bien du même ordre de grandeur que les quantités caractéristiques du problème z_0 et E_0 . On constate que les énergies pourtant très faibles des niveaux, sont associées à des hauteurs classiques macroscopiques. Le problème quantique est donc compliqué à observer via les énergies, on va donc utiliser une manière indirecte en s'intéressant aux hauteurs.

→ Tracer **densités**+ commenter+ lien avec h_n

3 Présentation de l'expérience

Nous allons désormais aborder le problème via une approche expérimentale et voir comment la situation exposée précédemment peut être simulée par un montage.

3.1 Les neutrons ultra froids

Pour mettre en évidence un comportement quantique dû à la gravité - qui, on le rappelle est très faible comparée aux autres interactions agissant à cette échelle - chez une particule, il faut que cette dernière ne soit pas soumise à ces autres interactions.

- Particule interagissant peu avec son environnement → Neutron : neutre, durée de vie longue et particule "élémentaire" (pas de désintégration).
- Nous souhaitons recréer expérimentalement les conditions présentées lors de la théorie. Le potentiel en mgz correspond à la gravité terrestre. Il faut aussi créer un potentiel infini, c'est à dire empêcher la particule d'aller plus bas que $z = 0$. On va utiliser un miroir, réfléchissant la particule à sa surface. Il faut donc que le neutron ne puisse pas pénétrer dans celui ci.
- **Pb.** : les neutrons issues de la fission de l'Uranium possèdent une vitesse trop importante **20 000 km/s** et son donc trop pénétrant.
- **Sol.** : Neutrons Ultra Froids (UCN) → Années 70 par Ilya Frank et Albert Steyerl.
Fonctionnement : collisions élastiques avec l'environnement (eau, graphite) → perte en vitesse : **Analogie boules de billards.**
Infime proportion des neutrons (10^{-11} fois le nombre totale de neutron) possède une vitesse entre **5 à 10 m/s** → UCN.
Influence : Taille caractéristique des neutrons → longueur de De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ avec p sa quantité de mouvement.
Conséquence : plus la vitesse du neutron est faible, plus sa taille caractéristique est élevée → les UCN, apparaissent plus "gros", ils seront donc réfléchis par les surfaces tel que $\frac{1}{\rho^3} < \lambda$, au lieu de les pénétrer.

3.2 Dispositif experimental

Maintenant que nous savons quelle particule utiliser, attardons nous sur le dispositif permettant de simuler le potentiel défini dans la théorie :

- Rôle du miroir (potentiel infini en $z = 0$), reflexion des UCN et justification de sa longueur ($D = \frac{v}{f_0}$
Or par analyse dimensionnelle $f_0 = \frac{E_0}{h} \simeq 145Hz$, ainsi $D = v_0 \frac{2\pi h}{E_0} = 7cm$)
- On traite le mouvement vertical (subissant la force de gravitation) indépendamment du mouvement horizontal (non piégé, ne subissant pas de force)
- L'absorbteur permet de sélectionner les états (comme nous le verrons par la suite)
- Le détecteur dénombre les neutrons après la fente

4 Mesure

Maintenant que la théorie ainsi que le cadre expérimental ont été décrit parlons un peu mesure.

4.1 Mesure (dite "intégrale")

Mais tout d'abord, attardons nous sur le fonctionnement de l'absorbeur par rapport aux états des neutrons :

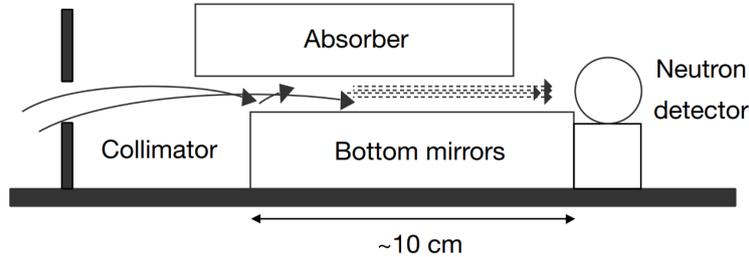


Fig.3 : Schéma du montage expérimentale.

Explication du fonctionnement de l'absorbeur :

- Les neutrons en entrée du dispositif sont dans une combinaison linéaire d'états ψ_n .

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Psi_n(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Psi_n(z) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad \text{avec } a_n = \langle \Psi | \Psi_n \rangle$$

- L'absorbeur \rightarrow rôle équivalent à un **instrument de mesure** :

Fonctionnement : Il va provoquer un **réduction du paquet d'onde**. Ainsi le neutron se trouvera :

- Soit dans une superposition des états (Ψ_n) dont les hauteurs classiques $h_n \geq H$ la hauteur de l'absorbeur : le neutron est absorbé.
- Soit dans une superposition des états dont les hauteurs classiques $h_n < H$: le neutron passe.

Dans le deuxième cas, on a en sortie de la fente :

$$\Psi_{ap.}(z, t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \Psi_n(z) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad \text{avec } N \text{ le nombre d'états sélectionnés par l'absorbeur.}$$

- Le neutron, une fois dans la fente, est dans l'état suivant $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$, et l'absorbeur placé de telle sorte à sélectionner les état $|n\rangle$ pour tout $n \geq 3$. Après la "mesure" de l'absorbeur, d'après le postulat des probabilités de mesures, il y aura donc 1 chance sur 3 que le neutron soit dans l'état $|\psi_{ap}\rangle = |3\rangle$. Dans ce cas la le neutron est absorbé. Mais il y a également 2 chances sur 3 qu'à la suite de la mesure le neutron soit dans l'état $|\psi_{ap}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$. Dans ce cas le neutron traverse la fente, et il y a donc une chance sur deux de mesurer le neutron, via le détecteur, dans l'état $|1\rangle$ ou $|2\rangle$.

Schéma récapitulatif

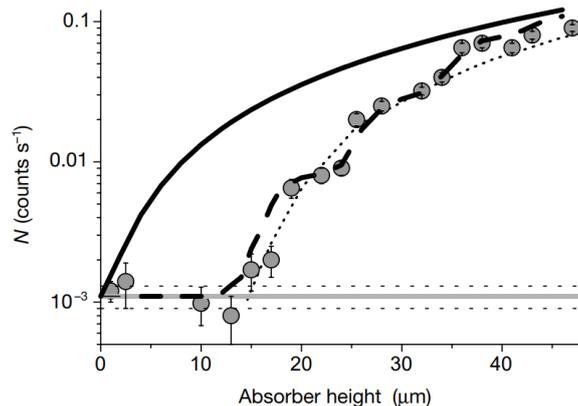


Fig.4 : Graphe expérimentale du flux de neutrons en fonction de la hauteur de l'absorbeur.

Explication du relevé expérimental

- Si la fente et l'absorbeur sont éloignés de moins de $15\mu m$, correspondant au point de rebroussement du premier état, la fente est opaque pour tous les neutrons.
- Comparaison classique / quantique
- Fonction en escalier
- Pas de neutrons avant $12\mu m \Leftrightarrow$ On peut déterminer

$$h_1 = 12.2 \pm 0.2\mu m$$

$$h_2 = 21.6 \pm 0.2\mu m$$

Comparaison à la théorie \rightarrow 15% près

5 Conclusion

En conclusion, nous avons mis en lumière le comportement quantique d'un neutron dans un champs de gravité, non seulement théoriquement mais également expérimentalement.

Nous avons d'abord vu que les fonctions d'ondes associées aux états quantiques de la gravité Ψ_n correspondaient à des fonctions de Airy.

Nous avons ensuite vu qu'il était possible de simuler le potentiel comme définie théoriquement avec un montage simple permettant de sélectionner les états quantique.

Enfin nous avons, grâce à ce montage, mis en évidence la quantification des états associés à la gravité pour des neutrons.

En utilisant un capteur mesurant non pas le nombre total de neutron, mais la disposition spatiale de chaque neutron, et en ajustant la hauteur de l'absorbeur pour ne laisser passer que les premiers états, nous aurions pu évaluer expérimentalement la densité de probabilité de Ψ_{ap} .

6 Bibliographie

- Guillaume Pignol. Préparation de l'expérience GRANIT et recherche de nouvelles interactions avec les neutrons.. Physique des Hautes Energies - Expérience [*hep - ex*]. Université Joseph-Fourier - Grenoble 1, 2009. Français. <tel-00420364>
- Konstantin Protassov. États quantiques du neutron dans le champ de pesanteur : un laboratoire pour l'étude de la gravitation. p.17-p.22.
- Valery V. Nesvizhevsky, Hans G. Börner, Alexander K. Petukhov, Hartmut Abele, Stefan BaeBler, Frank J. RueB, Thilo Stöferle, Alexander Westphal, Alexei M. Gagarski, Guennady A. Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field. Petrov, Alexander V. Strelkov.NATURE, [VOL 415], 17 JANUARY 2002, p.297-p.299.
- Tobias Jenke, David Stadler, Hartmut Abele, Peter Geltenbort. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 611 (2009). Q-BOUNCE—Experiments with quantum bouncing ultracold neutrons,p.318–p.321.
- M. Kreuz et al. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 611 (2009). A method to measure the resonance transitions between the gravitationally bound quantum states of neutrons in the GRANIT spectrometer p.326–p.330.